2η ώρα 29/5/19

<u>Άσκηση</u>: $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 9x^2-4xy+6y^2+3z^2+2\sqrt{5}x+4\sqrt{5}y+$
$+12z+16=0\}$

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, όπου:
$q(x,y,z)=9x^2+6y^2+3z^2-4xy$

$A=\begin{pmatrix}9&-2&0\\-2&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $P_A(t)=|A-tI_3|=\dots=-(t-10)(t-5)(t-3)$.

Άρα, ιδιοτιμές του A είναι: $\lambda_1=10, \lambda_2=5, \lambda_3=3$.

• $V(10)$: βάση του $V(10)$ είναι $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$. Μια ΟΚΒ του $V(10)$

είναι: $\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}=\vec{\varepsilon_1}$

• $V(5)$: βάση του $V(5)$ είναι: $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$. Μια ΟΚΒ του $V(5)$: $\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}=\vec{\varepsilon_2}$

• $V(3)$: βάση του $V(3)$: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{\varepsilon_3}$, η οποία είναι ΟΚΒ του $V(3)$.

Κύριοι άξονες της q είναι: $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}$

Τότε: αν x', y', z' είναι οι συνιστώσες του $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ στην ΟΚΒ $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}$, τότε: $\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}_{(*)}$, όπου $P=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&1/\sqrt{5}&0\\1/\sqrt{5}&2/\sqrt{5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

και ${}^tPAP=\begin{pmatrix}10&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

$(*)$ $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2x'+y'}{\sqrt{5}} \\ \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}} \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2x'+y'}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}} \\ z = z' \quad (**) \end{cases}$$

Με βάση τις σχέσεις $(**)$ η S θα πάρει τη μορφή: $S = \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, 10(x')^2 + 5(y')^2 + 3(z')^2 + 10y' + 12z' + 16 = 0\}$

$$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, 10(x')^2 + 5\left((y'+1)^2 - 1\right) + 3\left((z'+2)^2 - 4\right) + 16 = 0\}$$

$$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, 10(x')^2 + 5(y'+1)^2 + 3(z'+2)^2 - 1 = 0\}$$

$$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, 10(x')^2 + 5(y'+1)^2 + 3(z'+2)^2 = 1\}$$

Θέτουμε $X = x'$ Τότε $S = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{10X^2 + 5Y^2 + 3Z^2 = 1}_{\text{ελλειψοειδές}}\}$

$Y = y'+1$

$Z = z'+2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και υποθέτουμε ότι: $A^m = \mathbb{O}$, για κάποιο $m \geq 1$. Τότε $A^n = \mathbb{O}$. Τι ισχύει αν ο A είναι συμμετρικός?
(Έχει μπει θέμα Φεβ. 19)

<u>Λύση:</u> Έστω το πολυώνυμο $Q(t) = t^m$. Τότε $Q(A) = 0$.
Αν $Q_A(t)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A, τότε:

$$Q_A(t) \,/\, Q(t) = t^m \Rightarrow Q_A(t) = t^k, \text{ όπου } k \leq m$$

Επειδή $\deg Q_A(t) \leq n$, έπεται ότι $Q_A(t) = t^k$, όπου $k \leq n$

Τότε όμως $Q_A(A) = 0 \Rightarrow A^k = 0$, όπου $k \leq n$ και προφανώς τότε $A^n = 0$

Αν ο A: συμμετρικός $\xRightarrow{\text{φασμ. θεωρ.}}$ ο A: διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$
$\Rightarrow Q_A(t) = t^k$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. $\Rightarrow k = 1 \Rightarrow Q_A(t) = t \Rightarrow Q_A(A) = A = \mathbb{O}$

Διαφορετικά, υπάρχει ορθογώνιος P: ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP \Rightarrow 0 = A^m = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} {}^tP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} = \mathbb{O} \Rightarrow \lambda_i^m = 0, \forall i = 1, \ldots, n \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow A = \mathbb{O}$$

(2) Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός ενός ευκλείδειου χώρου $(E, <,>)$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$. Τότε: $f^* = -f \iff$

$\iff \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0, \ \forall \vec{x} \in E$

Αν $f^* = -f$, τι μορφή έχουν οι ιδιοτιμές της f;

Λύση: $\boxed{\Rightarrow}$ Έστω ότι $f^* = -f$. Τότε $\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{x}) \rangle =$

$= \langle \vec{x}, -f(\vec{x}) \rangle = -\langle \vec{x}, f(\vec{x}) \rangle = -\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle \Rightarrow 2\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0, \ \forall \vec{x} \in E$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E: 0 = \langle f(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y} \rangle = \langle f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \vec{x}+\vec{y} \rangle$

$= \underbrace{\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle}_{0} + \underbrace{\langle f(\vec{y}), \vec{y} \rangle}_{0} + \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{x} \rangle$

$= \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle + \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle \Rightarrow \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle = -\langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, -f(\vec{y}) \rangle \Rightarrow f^*(\vec{y}) = -f(\vec{y}), \ \forall \vec{y} \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow f^* = -f$

Έστω ότι $f^* = -f$ και λ ιδιοτιμή της f. Τότε υπάρχει $\vec{0} \neq \vec{x} \in E$:

$: f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Τότε $\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \lambda \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}_{\|\vec{x}\|^2 \neq 0} \Rightarrow \lambda = 0$

Άρα: $\left.\begin{array}{l} f^* = -f \\ f \text{ διαγωνοποιήσιμος} \end{array}\right\} \Rightarrow f = 0$

ΑΣΚΗΣΗ

③ ${}^tA=-A \Leftrightarrow \langle AX, X\rangle = 0,\ \forall X\in\mathbb{R}_n$ (ισοδύναμη με τη προηγούμενη αλλά για πίνακες).
και αν λ: ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{R}_n$, τότε $\lambda=0$
$f_A\ \mathbb{R}_n\to\mathbb{R}_n,\ f_A(X)=AX$

---

④ $A=\begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & b \end{pmatrix}$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$

① Να βρεθούν τα $a,b\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε ο A να έχει το $\lambda=0$ ως ιδιοτιμή με πολ/τα 2

Λύση
A: συμμετρικός $\overset{\Phi\Theta}{\Longrightarrow}$ A: διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow \forall$ ιδιοτιμή λ του A: πολ/τα της $\lambda=\dim_{\mathbb{R}}V(\lambda)$

Θέλουμε $\lambda=0$ να είναι ιδιοτιμή του A πολ/τας 2.
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}V(0)=2$

$V(0)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=X\in\mathbb{R}_3 \,/\, AX=0\right\}=\Lambda(\Sigma)$ όπου $(\Sigma): AX=0$

Άρα $\dim_{\mathbb{R}}\Lambda(\Sigma)=2 \Rightarrow 3-r(A)=2 \Rightarrow r(A)=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} a & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=2 \\ \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 8 & b \end{vmatrix}=0 \Rightarrow b=8 \end{cases}$$

⑤ $\left[V \leq E, \text{ τότε } V^{\perp} = \{ \vec{x} \in E \,/\, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0, \ \forall \vec{y} \in V \} \right]$

Αν $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$, τότε $V^{\perp\perp} = V$

Λύση: $\forall \vec{x} \in V : \vec{x} \in V^{\perp\perp} = (V^{\perp})^{\perp}$, διότι: $\forall \vec{y} \in V^{\perp} : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} V^{\perp} = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} V}$

Άρα $V \subseteq V^{\perp\perp}$

$$\dim_{\mathbb{R}} V^{\perp\perp} = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp} = \dim_{\mathbb{R}} E - (\dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} V) =$$

$$= \dim_{\mathbb{R}} V$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp\perp} = \dim_{\mathbb{R}} V \\ V \subseteq V^{\perp\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V = V^{\perp\perp}}$$